การบ้านรายวิชา SCMA351

การแปลงเชิงเส้นและการเปลี่ยนฐานหลัก

การแปลงเชิงเส้น (Linear Transformation)

1. กำหนดให้ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ จงแสดงว่าการแปลง (Transformation) ต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่

   (a) $T(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$ (b) $T(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. กำหนดให้ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ จงหาเมทริกซ์ตัวแทนของการแปลงเชิงเส้นต่อไปนี้

   (a) $T(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$ (b) $T(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. พิจารณาการแปลง $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ซึ่งหมุนจุด (x_1, x_2) ทวนเข็มนาฬิกาไปด้วยมุม θ ถ้าเราใช้ฐานหลักมาตรฐาน $\{e_1 e_2\}$ จะได้ว่า

   $$T(e_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

   จงหาเมทริกซ์ตัวแทนของ T และถ้า $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ จงหา $T(x)$

4. กำหนดการแปลงเชิงเส้น

   $$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 - 10x_3 \end{bmatrix}$$

   แล้วจงหา pre-image, $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ และ $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}\right)$

5. สำหรับเมทริกซ์ตัวแทน A ต่อไปนี้

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & -7 & -9 \\ -4 & 1 & 1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

ถ้านิยามการแปลงเมทริกซ์ $T(x) = Ax$ จงหา

(a) ker T และ ran T

(b) rank T และ nullity T

(c) T เป็นการแปลงทั่วถึง (onto) หรือไม่

(d) T เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one) หรือไม่

(e) เมทริกซ์คู่หนึ่งซึ่งสามารถนิยามการแปลงประกอบ (composite transformation) ได้

6. กำหนดการแปลงเชิงเส้น $T : P_3 \to M_{22}$ ต่อไปนี้

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{bmatrix} -a + 4b + c + 2d & 4a - b + 6c - d \\ a + 5b - 2c + 2d & a + 2c + 5d \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่าการแปลงเชิงเส้นข้างต้น เป็นการแปลงแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one), การแปลงแบบทั่วถึง (onto), และเป็นการแปลงที่หาตัวผกผันได้ (invertible) หรือไม่

การเปลี่ยนฐานหลัก (Change of Basis)

1. จงหาพิกัดของพหุนาม $p(t) = 5 + 7t - 3t^2$ ที่สัมพัทธ์กับฐานหลักต่อไปนี้

(a) $B = \{1, x, x^2\}$

(b) $B = \{1 + x, 2 + 3x, 5 + x + x^2\}$

2. พิจารณาการแปลงเชิงเส้น $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ เมื่อ $T(A) = A^\top$ และกำหนดให้

$$B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

เป็นฐานหลักชุดหนึ่งสำหรับ $\mathbb{R}^{2\times 2}$ จงแสดงว่า $[T(A)]_B = [T]_B[A]_B$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

3. เซตของพหุนาม $\beta = \{1 - t^2, t + 2, t^2\}$ แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ P_2 จงหาพิกัดของพหุนามเวกเตอร์ $at^2 + bt + c$ ใดๆ ในปริภูมิเวกเตอร์ P_2 ที่สัมพัทธ์กับเซต β

4. กำหนดให้ $B = \{b_1, b_2\}$ และ $C = \{c_1, c_2\}$ เป็นฐานหลัก 2 ชุดของปริภูมิเวกเตอร์ R^2 เมื่อ

$$b_1 = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}, c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์การเปลี่ยนพิกัดจากฐานหลัก B ไปสู่ฐานหลัก C