เอกสารประกอบการสอนรายวิชา
วทคณ 165 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

(SCMA 165 Ordinary Differential Equations)

สำหรับภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2558-59

อ.สมศักดิ์ โอฬารกิจเจริญ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนนี้ใช้ในการเรียนการสอนวิชา วทคณ 165 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรีสาขาวิศวกรรมศาสตร์ชั้นปี 1 ในภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2558-59

เนื้อหาในเอกสารนี้ครอบคลุมถึงทฤษฎีของสมการเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์ใช้ ซึ่งแบ่งออกเป็นบทต่างๆ ดังนี้ สมการเชิงอนุพันธ์ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่หนึ่ง สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสูงกว่าหนึ่ง นอกจากนี้ยังมีเนื้อหาในส่วนของพีชคณิตเชิงเส้นอีกด้วย

ถ้าผู้อ่านพบคำผิดใดๆก็ตาม สามารถแจ้งมาที่ผู้เขียนได้ที่อีเมล์ somsak.ora@mahidol.ac.th ผู้เขียนขอขอบคุณมา ณ ที่นี้

สมศักดิ์ โอฬารกิจเจริญ

สารบัญ

บทที่ 1

ระบบสมการเชิงเส้น

1.1 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

ปัญหาที่สำคัญที่สุดข้อหนึ่งในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น (linear algebra) คือการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น เช่น การหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$
\begin{aligned}
x + \;\; y \qquad &= 0 \\
2x - \;\; y + 3z &= 3 \\
x - 2y - \;\; z &= 3
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

ซึ่งนักศึกษาได้เรียนรู้การหาผลเฉลยโดยวิธีกำจัด (elimination) และวิธีที่ใช้แนวคิดของดีเทอร์มิแนนท์ (หลักเกณฑ์คราเมอร์ (cramer's rule)) มาแล้วในการเรียนตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ในหัวข้อนี้จึงถือเป็นการทบทวน โดยเราจะทบทวนทั้งสองวิธีอีกครั้ง เริ่มจากวิธีการกำจัดซึ่งเราเรียกว่าวิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction)

วิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน
(Gauss-Jordan reduction)

เราเริ่มด้วยบทนิยามของระบบสมการเชิงเส้น

บทนิยาม 1.1.1 (ระบบสมการเชิงเส้น, เอกพันธุ์, เมทริกซ์แต่งเติมและผลเฉลย (System of linear equations, homogeneous, augmented matrix and sol))
ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations) ที่มี m สมการ n ตัวแปรอยู่ในรูป

$$
\boxed{
\begin{matrix}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{matrix}
} \tag{SLE}
$$

โดยที่ a_{ij}, b_i, $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$, เป็นจำนวนจริง ระบบสมการ (SLE) เขียนได้ในรูปสมการเมทริกซ์

$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ หรือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{ME}$$

โดยที่

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

และ

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ถ้า $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ เราเรียก (SLE) ดังกล่าวว่า ระบบสมการเอกพันธุ์ (**homogeneous**)
ถ้า $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ เราเรียก (SLE) ดังกล่าวว่า ระบบสมการไม่เอกพันธุ์ (**nonhomogeneous**)
เราสามารถลดรูปสมการเมทริกซ์ (ME) ในรูปของเมทริกซ์ที่เรียกว่า **เมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix)** เขียนแทนด้วย $[\mathsf{A}|\boldsymbol{b}]$ หรือ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{12} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{AM}$$

สมการเมทริกซ์ (ME) มีผลเฉลย

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

ก็ต่อเมื่อ $\mathsf{A}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$ นั่นคือ s_1, s_2, ..., s_n เป็นผลเฉลย ของแต่ละสมการในระบบสมการ (SLE)
เซตผลเฉลยของระบบสมการ (SLE) คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก $\boldsymbol{s}$ ซึ่ง $\mathsf{A}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$

โจทย์ปัญหา 1

ระบบสมการใดเป็นระบบสมการเชิงเส้น ถ้าเป็นระบบสมการเชิงเส้นให้ระบุด้วยว่าเป็นเอกพันธุ์หรือไม่เอกพันธุ์

ระบบสมการ	เชิงเส้นหรือไม่เชิงเส้น	เอกพันธุ์หรือไม่เอกพันธุ์
$x + 2y = 0$ $x - 2y^2 = 0$		
$x + 2y = 1$ $x - 2y = 3$		
$x + 2y = 0$ $x - 2y = 0$		

□

โจทย์ปัญหา 2
จงเขียนระบบสมการเชิงเส้น (1.1) ในรูปสมการเทริกซ์ และเมทริกซ์แต่งเติม

หมายเหตุ

- สมการที่ i ของระบบสมการ (SLE) สอดคล้องกับแถวที่ i ของเมทริกซ์แต่งเติม (AM)
- เราแทนคำกล่าว ``แถวที่ i" ด้วยสัญกรณ์ R_i

ทฤษฎีบท 1.1.1 (วิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction))
*ถ้าเราแทนระบบสมการเชิงเส้นระบบหนึ่งด้วย**การดำเนินการตามแถว (row operations)** ต่อไปนี้*

Swapping : *การสลับที่ของสองสมการใด ๆ*

Rescaling : *การคูณสมการหนึ่งด้วยสเกลาร์ที่ไม่ใช่ศูนย์*

Pivoting : *การแทนสมการหนึ่งด้วยผลบวกของพหุคูณสมการอื่นกับสมการนั้น*

แล้วระบบสมการใหม่จะมีผลเฉลยเดียวกับระบบสมการเดิม

สัญกรณ์ที่ใช้ในการดำเนินการตามแถว (row operations)]

$R_i \leftrightarrow R_j$	การสลับที่แถวที่ i (R_i) และแถวที่ j (R_j)
kR_i	การคูณแถวที่ i (R_i) ด้วยสเกลาร์ $k \neq 0$
$kR_i + R_j$	การแทนที่แถวที่ j (R_j) ด้วยผลบวกของ พหุคูณแถวที่ i (kR_i) กับแถวที่ j (R_j)

หมายเหตุ

- สัญกรณ์ของการดำเนินการตามแถว เราจำกัดอยู่ในรูปที่กล่าวถึงข้างต้นเท่านั้น ตัวอย่างรูปฟอร์มต่อไปนี้ไม่มีความหมาย

$$R_1 + 2R_2,$$
$$R_1 - R_2,$$
$$2R_1 + 3R_3$$

บทนิยาม 1.1.2 (สมมูลตามแถว (Row equivalent))
เมทริกซ์สองเมทริกซ์ **สมมูลตามแถว (row equivalent)** ก็ต่อเมื่อเมทริกซ์หนึ่ง สามารถแปลงเป็นอีกเมทริกซ์ได้โดยวิธีการดำเนินการตามแถว (row operations)

หมายเหตุ

- A $\overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\sim}$ B ก็ต่อเมื่อ B $\overset{R_j \leftrightarrow R_i}{\sim}$ A
- A $\overset{kR_i}{\sim}$ B ก็ต่อเมื่อ B $\overset{\frac{1}{k}R_i}{\sim}$ A
- A $\overset{kR_i+R_j}{\sim}$ B ก็ต่อเมื่อ B $\overset{-kR_i+R_j}{\sim}$ A

โจทย์ปัญหา 3
จงหาเมทริกซ์คู่ที่สมมูลตามแถว (row equivalent)

1. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

บทนิยาม 1.1.3 (สมาชิกหลัก, ตัวแปรหลัก, รูปขั้นบันไดลดรูป (Leading entry, leading variable, reduced echelon form))

เรา เรียก เลขจำนวน แรก ที่ ไม่ใช่ ศูนย์ ใน แต่ละ แถว ของ เม ทริกซ์ แต่ง เติม ว่า **สมาชิก หลัก (leading entry)** ของแถวนั้น

เรา เรียก ตัวแปร ใน แต่ละ แถว ของ สมการ ที่ มี สมาชิก หลัก (leading entry) เป็น สัมประสิทธิ์ ว่า **ตัวแปร หลัก (leading variable)**

เมทริกซ์แต่งเติมอยู่ใน**รูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form)** ก็ต่อเมื่อ

1. สมาชิกหลักในแต่ละแถว อยู่ทางขวาของสมาชิกหลักในแถวก่อนหน้า (ยกเว้นแถวแรก)
2. แถวที่มีสมาชิกไม่เป็นศูนย์จะอยู่เหนือแถวที่มีแต่สมาชิกศูนย์เสมอ
3. สมาชิกหลักในแต่ละแถวเป็นเลข 1 และเป็นตัวเลขที่ไม่ใช่ศูนย์เพียงตัวเดียวในคอลัมน์นั้น

ระบบสมการเชิงเส้นอยู่รูปขั้นบันได ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นนั้นอยู่ในรูปขั้นบันได

หมายเหตุ

- นิยามรูปขั้นบันไดของเมทริกซ์ก็เป็นไปในลักษณะเดียวกัน

โจทย์ปัญหา 4
เมทริกซ์แต่งเติมในข้อใดอยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form)

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$ (d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{array}\right]$

และสำหรับเมทริกซ์แต่งเติมที่อยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูป จงหาสมาชิกหลักของแต่ละแถว และตัวแปรหลักของแต่ละสมการ

โจทย์ปัญหา 5
เมทริกซ์ใดต่อไปนี้อยู่รูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น
ขั้นตอนการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น (SLE) ด้วยวิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction)

1. เขียนระบบสมการในรูปเมทริกซ์แต่งเติม
2. ใช้การดำเนินการตามแถว (row operations) แปลงเมทริกซ์แต่งเติมจนอยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form)

ตัวอย่าง 1.1.1
จงใช้การดำเนินการตามแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ (1.1) จนอยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูป และหาผลเฉลยของระบบสมการนี้

วิธีทำ เราเขียนเมทริกซ์แต่งเติมได้ว่า

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

และใช้การดำเนินการตามแถว

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right]
&\underset{-R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right] \\
&\underset{-R_2+R_3}{\overset{\frac{1}{3}R_2+R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \\
&\underset{-\frac{1}{4}R_3}{\overset{-\frac{1}{3}R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\
&\underset{R_3+R_2}{\overset{-R_3+R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

สังเกตว่าเมทริกซ์แต่งเติมสุดท้ายอยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูป ดังนั้น

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น เซตผลเฉลยคือ

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

□

ตัวอย่าง 1.1.2

จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้วิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction)

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= -2 \\ y + 3z &= 7 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

วิธีทำ เราเขียนเมทริกซ์แต่งเติมได้ว่า

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

และใช้การดำเนินการตามแถว

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 3 & 7\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right] \underset{}{\overset{-R_1+R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 3 & 7\\ 0 & -1 & 1 & 3\end{array}\right]$$

$$\underset{R_2+R_3}{\overset{-R_2+R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -5 & -9\\ 0 & 1 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 4 & 10\end{array}\right]$$

$$\overset{\frac{1}{4}R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -5 & -9\\ 0 & 1 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 2.5\end{array}\right]$$

$$\underset{-3R_3+R_2}{\overset{5R_3+R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3.5\\ 0 & 1 & 0 & -0.5\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right]$$

ดังนั้น $x_1 = 3.5, x_2 = -0.5$ และ $x_3 = 3$ และเซตผลเฉลยคือ $\left\{\begin{bmatrix}3.5 & -0.5 & 3\end{bmatrix}^T\right\}$ □

โจทย์ปัญหา 6
จงใช้วิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดนในการหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + \ \ y + \ \ z &= \ \ 6\\ x + 2y + 3z &= 11\\ 2x + 3y - \ \ z &= \ \ 3 \end{aligned}$$

เซตผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

เซตผลเฉลยของสมการ $\mathsf{A}\mathit{x} = \mathit{b}$ คือ

$$\{\, s \mid \mathsf{A}s = b \,\}$$

การใช้วิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดนทำให้เราสามารถเขียนเซตผลเฉลยให้ชัดแจ้งมากขึ้น เช่นใน กรณีของระบบสมการ (1.1) เซตผลเฉลยคือ

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}\right\}$$

ซึ่งมีสมาชิกเพียงตัวเดียว ในขณะที่ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + y \qquad &= 0\\ 2x - y + 3z &= 3\\ 3x \qquad + 3z &= 7 \end{aligned}$$

มีเซตผลเฉลยเป็น $\varnothing$ หรือไม่มีผลเฉลยนั่นเอง ยังมีกรณีซึ่งเซตผลเฉลยมีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์ การเขียนเซตผลเฉลยจะได้กล่าวถึงในลำดับต่อไป ก่อนอื่น เรานิยามตัวแปรอิสระ

บทนิยาม 1.1.4 (ตัวแปรอิสระ (Free variables))
เราเรียกตัวแปรอื่นที่ไม่ใช่ตัวแปรหลัก (leading variable) ของแต่ละสมการในระบบสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูปว่า **ตัวแปรอิสระ (free variables)**

ตัวอย่าง 1.1.3
ตัวแปรอิสระของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \ \ x_3 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

คือตัวแปรใด

วิธีทำ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right]$$

เมทริกซ์อยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูปแล้ว มี x_1 และ x_2 เป็นตัวแปรหลัก และมี x_3 เป็นตัวแปรอิสระ □

หลักการหาเซตผลเฉลยในกรณีที่จำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์ก็คือ หลังจากที่เราได้เมทริกซ์แต่งเติมในรูปขั้นบันไดลดรูป ให้เขียนตัวแปรหลัก ในพจน์ของตัวแปรอิสระ (free variable)

ตัวอย่าง 1.1.4
จงหาเซตผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 8 \end{aligned}$$

วิธีทำ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{array}\right] \underset{\sim}{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right]$$

เมทริกซ์หลังอยู่ในรูปขั้นบันไดแล้ว มี x_1 และ x_2 เป็นตัวแปรนำ และมี x_3 เป็นตัวแปรอิสระ ใช้กระบวนการแทนที่ย้อนกลับ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3} \\ x_1 &= -x_2 - x_3 + 1 = -\frac{5}{3}x_3 - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้นเราเขียนผลเฉลยได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}x_3 - \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3} \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

และมีเซตผลเฉลย

$$\left\{ \begin{bmatrix} -4/3 \\ 7/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

□

ทฤษฎีบท 1.1.2 (รูปทั่วไปของเซตผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ (homogeneous linear system))
*สำหรับระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ใด ๆ ที่มีตัวแปรอิสระ k ตัว จะมีเวกเตอร์ **u₁**, **u₂**, ..., **uₖ** ที่ทำให้ เซตผลเฉลยเขียนได้ในรูปของ*

$$\boxed{\{\, c_1\boldsymbol{u_1} + c_2\boldsymbol{u_2} + \cdots + c_k\boldsymbol{u_k} \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R} \,\}}$$

และแต่ละเวกเตอร์ $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ ก็เป็นผลเฉลยของระบบสมการเอกพันธุ์

สำหรับระบบสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ใด ๆ (ในรูปสมการเมทริกซ์ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) เราเรียกระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ (ในรูปสมการเมทริกซ์ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$) ว่าระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์**สมทบ** (associated homogeneous linear system)

ทฤษฎีบท 1.1.3 (รูปทั่วไปของเซตผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ (nonhomogeneous linear system) ซึ่งมีผลเฉลย)
*สำหรับระบบสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ใด ๆ ซึ่งมีเวกเตอร์ **p** เป็นผลเฉลยเฉพาะ (ผลเฉลยที่ไม่ติดค่าคงตัวใด ๆ) และมีตัวแปรอิสระ m ตัว จะมีเวกเตอร์ **u₁**, **u₂**, ..., **uₘ** ที่ทำให้ เซตผลเฉลยเขียนได้ในรูปของ*

$$\boxed{\{\, \boldsymbol{p} + c_1\boldsymbol{u_1} + c_2\boldsymbol{u_2} + \cdots + c_m\boldsymbol{u_m} \mid c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R} \,\}}$$

และแต่ละเวกเตอร์ $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการเอกพันธุ์สมทบ

หมายเหตุ

- ระบบสมการไม่เอกพันธุ์บางระบบสมการไม่มีผลเฉลย

โจทย์ปัญหา 7 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้วิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5 \end{aligned}$$

โจทย์ปัญหา 8
จงหาเซตผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ (homogeneous)

$$\begin{aligned} 7x \qquad - 7z \qquad\quad &= 0 \\ 8x + y - 5z - 2w &= 0 \\ y - 3z \qquad\quad &= 0 \\ 3y - 6z - \;\; w &= 0 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. พิจารณาระบบสมการต่อไปนี้ ระบบสมการใดจัดเป็นระบบสมการเชิงเส้น และสำหรับระบบสมการเชิงเส้นให้เขียน ในรูปสมการเมทริกซ์

$$x + 2y = 3 \qquad x^2 + y = 1 \qquad xy = 1$$

$$y - 2x = 1 \qquad y^2 - x = 2 \qquad \sqrt{x} - y = 2$$

2. พิจารณาเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) เมทริกซ์ใดอยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form)

   (b) เมทริกซ์คู่ใดสมมูลตามแถว (row equivalent)

3. เมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) ในข้อใดอยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

4. พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x \qquad - z &= 0 \\ 3x + y \qquad &= 1 \\ -x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

   (a) ระบบสมการนี้เป็นระบบสมการเอกพันธุ์ (homogeneous) หรือไม่เอกพันธุ์ (nonhomogeneous)

   (b) จงเขียนระบบสมการดังกล่าวในรูปเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix)

   (c) ใช้การดำเนินการตามแถว (row operations) แปลงเมทริกซ์แต่งเติมให้อยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form)

   (d) จากรูปขั้นบันไดของเมทริกซ์แต่งเติม จงหาสมาชิกหลัก (leading entry), และตัวแปรหลัก (leading variable) ของแต่ละแถว

(e) ระบบสมการในรูปขั้นบันไดลดรูป มีตัวแปรอิสระหรือไม่

(f) จงหาเซตผลเฉลยของระบบสมการดังกล่าว

5. จงหาเซตผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้วิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction)

(a)

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 10 \\ 3x + 3y &= 9 \\ 5x + 4y + z &= 19 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 11,000 \\ 4x + 5y + 7z &= 63,000 \\ x + 2y + 3z &= 25,000 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - z &= 2 \\ x - 2y - 5z &= 3 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 1 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} x + 3z &= -1 \\ 3x + 2y + 11z &= 1 \\ x + y + 4z &= 1 \\ 2x - 3y + 3z &= -8 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 1 \\ 3x + 3y + 4z &= 2 \\ 5x + 5y + 5z &= 4 \end{aligned}$$

1.2 การลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction)

ในหัวข้อแรก เราใช้วิธีของเกาส์ (Gauss' method) คู่ไปกับกระบวนการแทนที่ย้อนกลับในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ในหัวข้อนี้เราจะขยายวิธีของเกาส์ต่อไปอีก ที่เรียกว่าการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction) วิธีนี้จะทำให้เราได้ผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น โดยไม่ผ่านกระบวนการแทนที่ย้อนกลับอีก

บทนิยาม 1.2.1 (รูปขั้นบันไดลดรูป (Reduced echelon form))
เมทริกซ์อยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form) ก็ต่อเมื่อ

1. เมทริกซ์นั้นอยู่รูปขั้นบันได (echelon form)
2. สมาชิกหลัก (leading entry) ในแต่ละแถวเป็นเลข 1 และเป็นตัวเลขที่ไม่ใช่ศูนย์เพียงตัวเดียวในคอลัมน์นั้น

โจทย์ปัญหา 9
เมทริกซ์ใดต่อไปนี้อยู่รูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form)

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&7\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&5\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 1.2.1
จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้วิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction)

$$\begin{aligned} x+y-2z &= -2\\ y+3z &= 7\\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

วิธีทำ เราเขียนเมทริกซ์แต่งเติมได้ว่า

$$\left[\begin{array}{ccr|r}1&1&-2&-2\\0&1&3&7\\1&0&-1&1\end{array}\right]$$

และใช้การดำเนินการตามแถว

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{-R_1+R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2+R_3}{\overset{-R_2+R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

$$\overset{\frac{1}{4}R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2.5 \end{array}\right]$$

$$\underset{-3R_3+R_2}{\overset{5R_3+R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3.5 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

ดังนั้น $x_1 = 3.5$, $x_2 = -0.5$ และ $x_3 = 3$ และเซตผลเฉลยคือ $\left\{\begin{bmatrix} 3.5 & -0.5 & 3 \end{bmatrix}^T\right\}$ □

บทนิยาม 1.2.2 (สมมูลตามแถว (Row equivalent))
เมทริกซ์สองเมทริกซ์ **สมมูลตามแถว (row equivalent)** ก็ต่อเมื่อเมทริกซ์หนึ่ง สามารถแปลงเป็นอีกเมทริกซ์ได้โดยวิธีการดำเนินการตามแถว (row operations)

หมายเหตุ

- A $\overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\sim}$ B ก็ต่อเมื่อ B $\overset{R_j \leftrightarrow R_i}{\sim}$ A
- A $\overset{kR_i}{\sim}$ B ก็ต่อเมื่อ B $\overset{\frac{1}{k}R_i}{\sim}$ A
- A $\overset{kR_i+R_j}{\sim}$ B ก็ต่อเมื่อ B $\overset{-kR_i+R_j}{\sim}$ A

โจทย์ปัญหา 10
จงหาเมทริกซ์คู่ที่สมมูลตามแถว (row equivalent)

1. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

โจทย์ปัญหา 11 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้วิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. พิจารณาเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix}3&4&5\\0&6&7\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

   (a) เมทริกซ์ใดอยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form)

   (b) เมทริกซ์คู่ใดสมมูลตามแถว (row equivalent)

2. จงหาเซตผลเฉลยของระบบสมการ โดยใช้วิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction)

$$\begin{aligned}2x+\ \ y+z&=10\\3x+3y\qquad&=\ \ 9\\5x+4y+z&=19\end{aligned}$$

3. จงหาเซตผลเฉลยของระบบสมการ โดยใช้วิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction)

$$\begin{aligned}x+\ \ y+\ \ z&=11,000\\4x+5y+7z&=63,000\\x+2y+3z&=25,000\end{aligned}$$

4. จงหาเซตผลเฉลยของระบบสมการ โดยใช้วิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction)

$$\begin{aligned}x+\ \ y+\ \ z&=1\\x\qquad-\ \ z&=2\\x-2y-5z&=3\end{aligned}$$

5. จงหาเซตผลเฉลยของระบบสมการ โดยใช้วิธีการลดทอนแบบเกาส์-จอร์แดน (Gauss-Jordan reduction)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \qquad\quad + 5x_4 &= 1 \\
x_1 \qquad\quad + x_3 + 2x_4 &= 1 \\
x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 1 \\
x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

1.3 ค่าลำดับชั้น (Rank)

เมื่อเราทำการดำเนินการตามแถว (row operations) กับเมทริกซ์หนึ่ง ๆ เราจะพบว่า เมทริกซ์ในรูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form) มีได้เมทริกซ์เดียว มีโครงสร้างสำคัญประการหนึ่งคือ จำนวนของสมาชิกหลัก (leading entry) ซึ่งก็คือจำนวนแถวที่ไม่ใช่แถวศูนย์ (แถวที่มีแต่สมาชิกเป็นศูนย์) นั่นเอง จำนวนนี้มีประโยชน์มากในการพิจารณาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

บทนิยาม 1.3.1 (ค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ (Rank))
ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$
ค่าลำดับชั้น (rank) ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย rank A คือ จำนวนแถวที่ไม่ใช่แถวศูนย์ของเมทริกซ์รูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form) ของ A

โจทย์ปัญหา 12
จงหาค่าลำดับชั้น (rank) ของเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ

- ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ $\operatorname{rank} \mathsf{A} = r$ และให้ U เป็นเมทริกซ์ในรูปขั้นบันไดลดรูปของ A แล้ว

$$\begin{aligned} r &= \text{จำนวนแถวที่ไม่ใช่แถวศูนย์ของ U} \\ &= \text{จำนวนคอลัมน์ของสมาชิกหลัก (leading entry) ของ U} \\ &\leq \min\{m, n\} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.3.1 (ประเภทของผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น)
ระบบสมการเชิงเส้นหนึ่งมี m สมการ n ตัวแปร

$$\mathsf{A}x = b$$

และมีเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) $\mathsf{M} = [\mathsf{A}|b]$

กรณี 1 *ถ้า* $\operatorname{rank} \mathsf{A} < \operatorname{rank} \mathsf{M}$ *แล้วระบบสมการนี้ไม่มีผลเฉลย*

กรณี 2 *ถ้า* $\operatorname{rank} \mathsf{A} = \operatorname{rank} \mathsf{M} = n$ *แล้วระบบสมการนี้มีผลเฉลยเดียว*

กรณี 3 *ถ้า* $\operatorname{rank} \mathsf{A} = \operatorname{rank} \mathsf{M} < n$ *แล้วระบบสมการนี้มีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์*

โจทย์ปัญหา 13

จงตรวจสอบว่าระบบสมการว่าอยู่ในประเภทใดถ้าระบบสมการนี้มีเมทริกซ์แต่งเติม

$$\mathsf{M} = [\mathsf{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

โจทย์ปัญหา 14
จงตรวจสอบว่าระบบสมการว่าอยู่ในประเภทใดถ้าระบบสมการนี้มีเมทริกซ์แต่งเติม

$$\mathsf{M} = [\mathsf{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

โจทย์ปัญหา 15
จงตรวจสอบว่าระบบสมการว่าอยู่ในประเภทใดถ้าระบบสมการนี้มีเมทริกซ์แต่งเติม

$$\mathsf{M} = [\mathsf{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & -12 & -6 & 3 \end{array}\right]$$

ทฤษฎีบท 1.3.2
ระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ n ตัวแปร ซึ่ง $m < n$ มีสองทางที่เป็นไปได้คือ

1. *ระบบสมการไม่มีผลเฉลย*
2. *ระบบสมการมีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์*

ถ้าระบบสมการมีเมทริกซ์แต่งเติม $[\mathsf{A}|\boldsymbol{b}]$ และ $\operatorname{rank}\mathsf{A} = m$ แล้วระบบสมการจะมีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์สำหรับทุก ๆ $\boldsymbol{b}$

ทฤษฎีบท 1.3.3
ระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการ n ตัวแปร และมีเมทริกซ์แต่งเติม $[\mathsf{A}|\boldsymbol{b}]$ โดยที่ $\operatorname{rank}\mathsf{A} = n$ จะมีผลเฉลยเดียวสำหรับทุก ๆ $\boldsymbol{b}$

โจทย์ปัญหา 16 พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$x + 2y = a$$
$$3x + 4y = b$$

โดยที่ a และ b เป็นค่าคงตัวใด ๆ จงหาเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) $[\mathsf{A}|\boldsymbol{b}]$ ของระบบสมการนี้ และแปลงให้อยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form) จากนั้นหา $\operatorname{rank}\mathsf{A}$ ระบบสมการนี้มีผลเฉลยหรือไม่ ถ้ามีให้หาผลเฉลย

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าลำดับชั้น (rank) ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 10 & -15 \\ 4 & -8 & 12 \end{bmatrix}$$

2. พิจารณาเมทริกซ์

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2b \\ 1 & a & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ a และ b ที่ทำให้ rank $\mathsf{A} = 2$ และ rank $\mathsf{A} = 3$

3. ระบบสมการหนึ่งมีเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix)

$$\mathsf{M} = [\mathsf{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 8 \\ -2 & 7 & 0 & -11 \end{array}\right]$$

   (a) จงหา rank A และ rank M

   (b) ระบบสมการนี้มีผลเฉลยหรือไม่

   (c) จงหาจำนวนตัวแปรอิสระ (free variables) ของระบบสมการนี้จากเมทริกซ์รูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form) ของ M

   (d) ถ้าระบบสมการนี้มีผลเฉลย จงหาเซตผลเฉลย

4. พิจารณาเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix)

$$\mathsf{M} = [\mathsf{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & b_2 \\ 1 & 4 & 5 & b_3 \end{array}\right]$$

จงหา rank A, rank M และเงื่อนไขที่ทำให้ระบบสมการนี้มีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์

5. พิจารณาเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 13 \\ 7 & 14 & 22 \\ 9 & 18 & 27 \end{bmatrix}$$

ของระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ (homogeneous) จงหา rank A และจำนวนผลเฉลยของระบบสมการนี้ และหาเซตผลเฉลย

บทที่ 2

ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space)

2.1 ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space)

บทนิยาม 2.1.1 (ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space))
ให้ $\mathcal{V}$ เป็นเซตพร้อมด้วยตัวดำเนินการ **การบวก (addition)** และ **การคูณด้วยสเกลาร์ (scalar multiplication)**
ถ้า $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ และ α เป็นสเกลาร์
การบวก $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ เราเขียนแทนด้วย

$$\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$$

การคูณ $\boldsymbol{v}$ ด้วยสเกลาร์ α เราเขียนแทนด้วย

$$\alpha \boldsymbol{v}$$

เราเรียก $\mathcal{V}$ พร้อมด้วยการดำเนินการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ว่า **ปริภูมิเวกเตอร์ (vector space)** ก็ต่อเมื่อสัจพจน์ (axiom) ต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับสมาชิก $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ ใน $\mathcal{V}$ และสเกลาร์ α, β ใด ๆ

สัจพจน์การปิด (Axioms of closure)

(C1) $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$

(C2) $\alpha \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$

สัจพจน์การบวก (Axioms of addition)

(A1) $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$

(A2) $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w})$

(A3) มีสมาชิก $\boldsymbol{0} \in \mathcal{V}$ เรียกว่า **เอกลักษณ์การบวก** ของ $\mathcal{V}$ ซึ่งมีสมบัติว่า $\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$ สำหรับ $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$

(A4) สำหรับแต่ละสมาชิก $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ จะมี $-\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ เรียกว่า **ตัวผกผันการบวก** ของ $\boldsymbol{v}$ ซึ่งมีสมบัติว่า $\boldsymbol{v} \oplus (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$

สัจพจน์การคูณด้วยสเกลาร์ (Axioms of scalar multiplication)

(A5) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{v} \oplus \beta \boldsymbol{v}$

(A6) $\alpha(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{u} \oplus \alpha \boldsymbol{v}$

(A7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{v} = \alpha(\beta \boldsymbol{v})$

(A8) $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

เราเรียกสมาชิกของปริภูมิ $\mathcal{V}$ ว่าเวกเตอร์

ตัวอย่าง 2.1.1
จงตรวจสอบว่าเซตของเวกเตอร์ระบุตำแหน่ง (position vector) $V_2 = \{\, \langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbb{R}\,\}$ พร้อมด้วยการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ปกติ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle &= \langle a + c, b + d\rangle \\ \alpha\langle a, b\rangle &= \langle \alpha a, \alpha b\rangle\end{aligned}$$

กำหนดให้ $\langle a, b\rangle$ และ $\langle a, b\rangle$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่ง และ α, β เป็น สเกลาร์
วิธีทำ เราต้องตรวจสอบสัจพจน์ทั้งสามกลุ่มว่าเป็นจริง ดังนี้

สัจพจน์การปิด (Axioms of closure)

(C1) $\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle = \langle a + c, b + d\rangle \in V_2$

(C2) $\alpha\langle a, b\rangle = \langle \alpha a, \alpha b\rangle \in V_2$

สัจพจน์การบวก (Axioms of addition)

(A1)

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle &= \langle a + c, b + d\rangle \\ &= \langle a + c, b + d\rangle \\ &= \langle c, d\rangle + \langle a, b\rangle\end{aligned}$$

(A2)

$$\begin{aligned}\big(\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle\big) + \langle e, f\rangle &= \langle a + c, b + d\rangle + \langle e, f\rangle \\ &= \langle (a + c) + e, (b + d) + f\rangle \\ &= \langle a + (c + e), b + (d + f)\rangle \\ &= \langle a, b\rangle + \langle c + e, d + f\rangle \\ &= \langle a, b\rangle + \big(\langle c, d\rangle + \langle e, f\rangle\big)\end{aligned}$$

(A3) มีสมาชิก $\langle 0, 0\rangle \in V_2$ เรียกว่า **เอกลักษณ์การบวก** ของ V_2 ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle + \langle 0, 0\rangle &= \langle a + 0, b + 0\rangle \\ &= \langle a, b\rangle\end{aligned}$$

สำหรับ $\langle a, b\rangle \in V_2$

(A4) สำหรับแต่ละสมาชิก $\langle a, b\rangle \in V_2$ จะมีตัวผกผันการบวกคือ $\langle -a, -b\rangle \in V_2$ ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle + \langle -a, -b\rangle &= \langle a + (-a), b + (-b)\rangle \\ &= \langle a - a, b - b\rangle \\ &= \langle 0, 0\rangle\end{aligned}$$

สัจพจน์การคูณด้วยสเกลาร์ (Axioms of scalar multiplication)

(A5)

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\langle a,b\rangle &= \langle(\alpha+\beta)a,(\alpha+\beta)b\rangle\\ &= \langle \alpha a+\beta a, \alpha b+\beta b\rangle\\ &= \langle \alpha a,\alpha b\rangle + \langle \beta a,\beta b\rangle\\ &= \alpha\langle a,b\rangle + \beta\langle a,b\rangle\end{aligned}$$

(A6)

$$\begin{aligned}\alpha\big(\langle a,b\rangle+\langle c,d\rangle\big) &= \alpha\big(\langle a+c,b+d\rangle\big)\\ &= \langle \alpha(a+c),\alpha(b+d)\rangle\\ &= \langle \alpha a+\alpha c,\alpha b+\alpha d\rangle\\ &= \langle \alpha a,\alpha b\rangle+\langle \alpha c,\alpha d\rangle\\ &= \alpha\langle a,b\rangle+\alpha\langle c,d\rangle\end{aligned}$$

(A7)

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\langle a,b\rangle &= \langle(\alpha\beta)a,(\alpha\beta)b\rangle\\ &= \langle \alpha(\beta a),\alpha(\beta b)\rangle\\ &= \alpha\big(\langle \beta a,\beta b\rangle\big)\\ &= \alpha\big(\beta\langle a,b\rangle\big)\end{aligned}$$

(A8) $1\mathbf{v}=\mathbf{v}$

$$\begin{aligned}1\langle a,b\rangle &= \langle 1a,1b\rangle\\ &= \langle a,b\rangle\end{aligned}$$

นั่นคือ V_2 เป็นปริภูมิเวกเตอร์ □

ตัวอย่าง 2.1.2
ตัวอย่างของเซตพร้อมด้วยตัวดำเนินการที่เหมาะสม ซึ่งเป็นปริภูมิเวกเตอร์ได้แก่

1. เซตของเมทริกซ์ $\mathbb{R}^{m\times n}$ พร้อมด้วยการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ปกติ
2. เซตของฟังก์ชันค่าจริง $\mathsf{F}(-\infty,\infty)$ พร้อมด้วยการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ปกติ
3. เซตของฟังก์ชันค่าจริงบน $[a,b]$, $\mathsf{F}[a,b]$ พร้อมด้วยการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ปกติ

วิธีทำ การแสดงว่าเป็นปริภูมิเวกเตอร์ สามารถเช็คได้จากสัจพจน์ทั้งสิบข้อที่ได้กล่าวถึง (ลองทำดู) □

ปริภูมิย่อย (Subspace)

บทนิยาม 2.1.2 (ปริภูมิย่อย (Subspace))
ให้ $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{V}$
เซต $\mathcal{U}$ เป็น**ปริภูมิย่อย (subspace)** ของ $\mathcal{V}$ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไข สองข้อต่อไปนี้เป็นจริง

สมบัติปิดการบวก (S1) : $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ สำหรับแต่ละ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$

สมบัติปิดการคูณด้วยสเกลาร์ (S2) : $\alpha\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ สำหรับทุก ๆ $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ และทุก ๆ สเกลาร์ α

ตัวอย่าง 2.1.3
พิจารณาเซตของเวกเตอร์ $\mathcal{U} \subset V_2$

$$\mathcal{U} = \{\, \langle a, a\rangle \mid a \in \mathbb{R} \,\}$$

จงแสดงว่า $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ V_2

วิธีทำ สมบัติปิดการบวก (S1) : ให้ $\mathbf{u} = \langle u, u\rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle v, v\rangle \in \mathcal{U}$ ดังนั้น

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle = \langle u + v, u + v\rangle$$

ดังนั้น $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$

สมบัติปิดการคูณด้วยสเกลาร์ (S2) : ให้ $\mathbf{u} = \langle u, u\rangle$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$ ดังนั้น

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha\langle u, u\rangle = \langle \alpha u, \alpha u\rangle$$

ดังนั้น $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิย่อยของ V_2 □

ตัวอย่าง 2.1.4
พิจารณาเซตของฟังก์ชันพหุนามที่มีดีกรีน้อยกว่าหรือเท่ากับ n, P_n

$$\mathsf{P}_n = \{\, a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \,\}$$

จงแสดงว่า P_n เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathsf{F}(-\infty, \infty)$

วิธีทำ ให้ $\mathbf{p} = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ และ $\mathbf{q} = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n \in \mathsf{P}_n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathbf{p} + \mathbf{q} &= (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) + (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)\\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n \in \mathsf{P}_n\end{aligned}$$

ให้ α เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\alpha\mathbf{p} &= \alpha(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)\\ &= (\alpha a_0) + (\alpha a_1)t + \cdots + (\alpha a_n)t^n \in \mathsf{P}_n\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\mathsf{F}(-\infty, \infty)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $\mathsf{P}_n \subset \mathsf{F}(-\infty, \infty)$ มีสมบัติปิดการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ เราจึงสรุปได้ว่า P_n เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathsf{F}(-\infty, \infty)$ □

โจทย์ปัญหา 17

พิจารณาเซต $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ โดยที่

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

จงแสดงว่า $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^{2\times 2}$

แบบฝึกหัด

1. ให้ $\mathcal{V}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^2$ พร้อมด้วยการบวก $\oplus$ และการคูณด้วยสเกลาร์ $*$ ที่นิยามดังนี้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\alpha * \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่า $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

2. ให้ $\mathcal{V}$ เป็นเซตของคู่อันดับของจำนวนจริง (a, b) และนิยามการบวกว่า

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

นิยามการคูณด้วยสเกลาร์ว่า

$$k(a, b) = (ka, 0)$$

จงแสดงว่า $\mathcal{V}$ ไม่ใช่ปริภูมิเวกเตอร์

3. เซตย่อยในข้อใดเป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^2$

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \; xy \geq 0 \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \; x = y \right\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \; x^2 = y^2 \right\}$

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \; x = y^2 \right\}$

4. เซตในข้อใดเป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^{2\times 2}$

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & a \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $\{$ A | A$^k = 0$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k $\}$

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a + d = 0 \right\}$

5. เซตในข้อใดเป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ P_2

(a) $\{\, at + bt^2 \mid a, b \in \mathbb{R} \,\}$

(b) $\{\, a + bt + ct^2 \mid a + 2b + 3c = 0 \,\}$

(c) $\{\, \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p}(0) = 0 \,\}$

(d) $\{\, a + bt \mid a, b \in \mathbb{R} \,\}$

2.2 การเป็นอิสระเชิงเส้น (Linear independence)

บทนิยาม 2.2.1 (ผลรวมเชิงเส้น (Linear combination), span)
ให้ $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์
ให้ $\mathcal{S} = \{ v_1, v_2, \ldots, v_k \} \subset \mathcal{V}$
เราเรียกเวกเตอร์

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k \tag{2.1}$$

ว่า **ผลรวมเชิงเส้น (linear combination)** ของ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ โดยที่ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ เป็นสเกลาร์
เซตของทุก ๆ ผลรวมเชิงเส้น (2.1) ของ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ เรียกว่า **สแปน (span)** ของ $\{ v_1, v_2, \ldots, v_k \}$ และเขียนแทนด้วย

$$\text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \quad \text{หรือ} \quad \text{span}\,\mathcal{S}$$

ตัวอย่าง 2.2.1
ในปริภูมิเวกเตอร์ 3 มิติ $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ กำหนด $\mathcal{S} = \{i, j, k\}$
จงแสดงว่า span $\mathcal{S} = \mathcal{V}$
(หรือเขียนเป็นประโยคภาษาอังกฤษได้ว่า $\mathcal{S}$ spans $\mathcal{V}$.)

ตัวอย่าง 2.2.2
จงหา span $\{i, j\}$

หมายเหตุ

- คำว่า span ที่เราได้กล่าวถึงมามีสองความหมาย คือ
  1. ความหมายที่เป็นคำนาม หมายถึง เซตของผลรวมเชิงเส้นดังในบทนิยาม (2.2.1) ของผลรวมเชิงเส้น
  2. ความหมายที่เป็นคำกิริยา หมายถึง แผ่ทั่วในบทนิยาม (2.2.2) ของเซตแผ่ทั่ว

  เนื้อความรอบข้างจะทำให้เข้าใจคำว่า span ที่กำลังกล่าวถึง

ตัวอย่าง 2.2.3
ในปริภูมิเวกเตอร์ P_1
พิจารณา $p_1 = 4$, $p_2 = 1 + 3t$, และ $p_3 = 1 - t$, จงแสดงว่า $16 + 4t \in \text{span}\{ p_1, p_2, p_3 \}$

วิธีทำ

$$16 + 4t = 2p_1 + 3p_2 + 5p_3$$

$\square$

โจทย์ปัญหา 18
ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^{2\times 2}$
พิจารณา $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
เมทริกซ์ B เขียนได้ในรูปผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของ A_1 และ A_2 หรือไม่?

ทฤษฎีบท 2.2.1
ให้ $\mathcal{S} = \{\, v_1, v_2, \dots, v_k \,\}$ เป็นเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathcal{V}$ แล้ว

1. *span $\mathcal{S}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathcal{V}$*
2. *span $\mathcal{S}$ เป็นปริภูมิย่อยที่เล็กที่สุดของ $\mathcal{V}$ ซึ่ง มี $\mathcal{S}$ เป็นเซตย่อย*

ตัวอย่าง 2.2.4
ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^{2\times 2}$
พิจารณา $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $\mathcal{S} = \{\, A_1, A_2 \,\}$ จากท.บ. (2.2.1) จะได้ว่า span $\mathcal{S}$ เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^{2\times 2}$ แต่ไม่เท่ากับ $\mathbb{R}^{2\times 2}$

วิธีทำ ลองหาสมาชิกใน $\mathbb{R}^{2\times 2}$ แต่ไม่ได้อยู่ใน span $\mathcal{S}$

□

บทนิยาม 2.2.2 (เซตแผ่ทั่ว (Spanning set))
ให้ $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathcal{V}$ ให้ $\mathcal{S}$ เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{U}$
ถ้า span $\mathcal{S} = \mathcal{U}$ แล้วเรากล่าวว่า $\mathcal{S}$ เป็น **เซตแผ่ทั่ว (spanning set)** ของ $\mathcal{U}$ บางครั้งเรากล่าวว่า $\mathcal{S}$ **แผ่ทั่ว (span)** $\mathcal{U}$

ตัวอย่าง 2.2.5
$\mathcal{S} = \{\, 1, t, t^2 \,\}$ เป็นเซตแผ่ทั่ว (spanning set) ของ P_2

วิธีทำ สังเกตว่าสำหรับสมาชิก p ใด ๆใน P_2 อยู่ในรูป

$$p = a_0 + (a_1)t + (a_2)t^2$$

ซึ่งชัดเจนว่าเขียนอยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกใน $\mathcal{S}$ □

โจทย์ปัญหา 19
ให้ $\mathcal{U} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ให้ $\mathcal{S} = \{\, E_1, E_2, E_3 \,\}$ โดยที่

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่า $\mathcal{U} = \operatorname{span} \mathcal{S}$

บทนิยาม 2.2.3 (การเป็นอิสระเชิงเส้น (Linear independece)) , การไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (Linear dependence)]
ให้ $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์
เรากล่าวว่าเซต $\mathcal{S} = \{\, v_1, v_2, \dots, v_k \,\} \subset \mathcal{V}$ **เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly independent)** ถ้าสมการ

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k = 0 \tag{2.2}$$

มีผลเฉลยเดียวคือ $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$
เรากล่าวว่าเซต $\mathcal{S}$ **ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly dependent)** ถ้าสมการ (2.2) มี ผลเฉลยซึ่งบาง x_1, x_2, ..., x_k ไม่เป็นศูนย์

โจทย์ปัญหา 20
พิจารณาปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^{2\times 2}$
ให้ $\mathcal{S} = \{\, \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3 \,\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ โดยที่

$$\mathsf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{A}_3 = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่าเซต $\mathcal{S}$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly dependent)

2.3 ฐานหลักและมิติ (Basis and dimension)

บทนิยาม 2.3.1 (ฐานหลัก (Basis))
ฐานหลัก (Basis) ของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathcal{V}$ คือเซตย่อย $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้น (linearly independent) และแผ่ทั่ว (span) $\mathcal{V}$

หมายเหตุ
โดยปกติแล้ว ฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์มีได้หลายเซต

ตัวอย่าง 2.3.1 $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$


$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$


$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ได้ว่า สำหรับ $\mathsf{v} \in \mathcal{V} = \mathbb{R}^2$

$$\mathsf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{5}(v_1 + 2v_2) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{5}(-v_1 + 3v_2) \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \square$$

ตัวอย่าง 2.3.2
ฐานหลักมาตรฐาน (standard basis) ของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^{2\times 2}$ คือเซต $\{\, \mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2, \mathsf{E}_3, \mathsf{E}_4 \,\}$ โดยที่

$$\mathsf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\square$

ตัวอย่าง 2.3.3
ฐานหลักมาตรฐาน (standard basis) ของ P_2 คือเซตของโพลิโนเมียลซึ่งมีสมาชิก 3 ฟังก์ชัน คือ

$$\mathsf{p}_0 = 1, \quad \mathsf{p}_1 = t, \quad \mathsf{p}_2 = t^2$$

$\square$

ทฤษฎีบท 2.3.1 (การไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (Linear dependence) และ span)
ให้ $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ซึ่งมีฐานหลัก $\mathcal{B} = \{ \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \ldots, \mathsf{v}_k \}$

1. *เซตย่อยของ $\mathcal{V}$ ซึ่งมีจำนวนสมาชิกมากกว่า k จะไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly dependent)*
2. *เซตย่อยของ $\mathcal{V}$ ซึ่งมีจำนวนสมาชิกน้อยกว่า k จะไม่แผ่ทั่ว $\mathcal{V}$*

ตัวอย่าง 2.3.4
พิจารณาปริภูมิเวกเตอร์ P_2
เซต $\mathcal{S}_2 = \{ 1, t^2 - 2t + 1, t - 1, t^2 \}$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly dependent) ในขณะที่เซต $\mathcal{S}_1 = \{ t - 1, t^2 \}$ ไม่แผ่ทั่ว P_2

วิธีทำ จำนวนสมาชิกของฐานหลักมาตรฐานของ P_2 คือ 3 จากนั้นใช้ท.บ. (2.3.1) สรุปผล □

ทฤษฎีบท 2.3.2 (จำนวนสมาชิกในฐานหลัก)
ให้ $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักของ $\mathcal{V}$ ที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ k แล้ว จำนวนสมาชิกในฐานหลักอื่น ๆ ของ $\mathcal{V}$ ก็จะเท่ากับ k ด้วย

บทนิยาม 2.3.2 (มิติ (dimension))
เรากล่าวว่าปริภูมิเวกเตอร์มี**มิติจำกัด (finite dimensional)** ถ้าจำนวนสมาชิกในฐานหลักเป็นจำนวนจำกัด
จำนวนสมาชิกในฐานหลักเรียกกว่า **มิติ (dimension)** ของ $\mathcal{V}$
มิติของปริภูมิศูนย์ (subspace zero) เท่ากับ 0
เรากล่าวว่าปริภูมิเวกเตอร์มี**มิติอนันต์ (infinite dimensional)** ถ้าปริภูมิเวกเตอร์ ไม่มีฐานหลักซึ่งมีจำนวนสมาชิกจำกัด

ตัวอย่าง 2.3.5
P_2 มีมิติจำกัด ในขณะที่ $\mathsf{F}(-\infty, \infty)$ มีมิติอนันต์

ทฤษฎีบท 2.3.3 (การสร้างฐานหลักจากเซตซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้น)
ให้ $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ซึ่งมีมิติเท่ากับ k
ให้ $\mathcal{S} = \{ \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \ldots, \mathsf{v}_p \}$ เป็นเซตซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้น (linearly independent)
ให้ $\mathsf{v} \in \mathcal{V}$ และ $\mathsf{v} \notin \operatorname{span} \mathcal{S}$ แล้ว
เซต $\mathcal{S}' = \{ \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \ldots, \mathsf{v}_p, \mathsf{v} \}$ จะเป็นอิสระเชิงเส้น เราสามารถทำกระบวนการต่อไปเช่นนี้จนกระทั่งได้ฐานหลัก

โจทย์ปัญหา 21
พิจารณาปริภูมิเวกเตอร์ P_1
เซต $\mathcal{S} = \{ t - 2 \}$ เป็นอิสระเชิงเส้น จงหาสมาชิกเพิ่ม ให้ $\mathcal{S}$ เพื่อให้เป็นฐานหลักของ P_1

ทฤษฎีบท 2.3.4 (การสร้างฐานหลักจากเซตซึ่งไม่เป็นอิสระเชิงเส้น แต่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์)
ให้ $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ซึ่งมีมิติเท่ากับ k
ให้ $\mathcal{S} = \{ \mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \ldots, \mathsf{v}_p \}$ เป็นเซตซึ่งไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly dependent) (และมีเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์เป็นสมาชิก) แต่แผ่ทั่ว $\mathcal{V}$
เราสามารถที่จะดึงเวกเตอร์ออกจาก $\mathcal{S}$ บางตัวแต่ยังทำให้เซตใหม่ $\mathcal{S}'$ แผ่ทั่ว $\mathcal{V}$ เราสามารถทำกระบวนการต่อไปเช่นนี้จนกระทั่งได้ฐานหลัก

ตัวอย่าง 2.3.6
พิจารณาปริภูมิเวกเตอร์ P_1
เซต $\mathcal{S} = \{ 1+t, t-2, 3 \}$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น จงลดสมาชิก ให้ $\mathcal{S}$ เพื่อให้เป็นฐานหลักของ P_1

ทฤษฎีบท 2.3.5
ให้ $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ซึ่งมีมิติเท่ากับ $k > 0$
ให้ $\mathcal{S}$ เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{V}$ และมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ k

1. *ถ้า $\mathcal{S}$ แผ่ทั่ว $\mathcal{V}$ แล้ว $\mathcal{S}$ จะเป็นอิสระเชิงเส้น และดังนั้น $\mathcal{S}$ จึงเป็นฐานหลัก*
2. *ถ้า $\mathcal{S}$ เป็นอิสระเชิงเส้น แล้ว $\mathcal{S}$ จะแผ่ทั่ว $\mathcal{V}$ และดังนั้น $\mathcal{S}$ จึงเป็นฐานหลัก*

โจทย์ปัญหา 22
ปริภูมิเวกเตอร์ P_3 มีมิติเท่ากับ 4 จงแสดงว่า

$$\mathcal{B} = \{ 1, t, t^2, 1+t+t^2+t^3 \}$$

เป็นอิสระเชิงเส้น และดังนั้นจึงเป็นฐานหลักด้วย

แบบฝึกหัด

1. พิจารณาว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้เป็นผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของสมาชิกในเซตที่กำหนดหรือไม่

   (a) $f = 1, \mathcal{S} = \{ \sin^2 t, \cos^2 t \}$

   (b) $p = 5 + 4t + t^2, \mathcal{S} = \{ -1 + t + t^2, 1 + 2t + t^2 \}$

   (c) $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

2. จงตรวจสอบว่าเซต $\mathcal{S} = \{ 1 - t + t^2, 1 + 2t \}$ แผ่ทั่ว (span) P_2 หรือไม่?

3. จงตรวจสอบว่าเซต $\mathcal{S}$ ต่อไปนี้เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly independent) หรือไม่ ถ้า $\mathcal{S}$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly dependent) จงหาเวกเตอร์ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของเวกเตอร์ที่เหลือ

   (a) $\mathsf{F}(-\infty, \infty) : \ \mathcal{S} = \{ \sin t, \cos t \}$

   (b) $\mathsf{P}_2 : \ \mathcal{S} = \{ 1 - t, 1 + t + t^2, 3 - t + t^2 \}$

   (c) $\mathbb{R}^{2\times 2} : \ \mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

   (d) $\mathbb{R}^{2\times 2} : \ \mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

4. จงหาสมาชิกเพิ่มให้ $\mathcal{S}$ เพื่อให้เป็นฐานหลัก (basis) ของปริภูมิเวกเตอร์ที่กำหนด

   (a) $\mathsf{P}_2 : \ \mathcal{S} = \{ 1 - t, 1 + t \}$

   (b) $\mathbb{R}^{2\times 2} : \ \mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

5. จงหาฐานหลักของปริภูมิย่อย $\mathcal{U} = \{ p \in \mathsf{P}_3 \mid p(1) = 0 \}$ และ หามิติของ $\mathcal{U}$

6. ให้

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

   จงอธิบายถึงสมาชิกในปริภูมิย่อย $\mathcal{U} = \operatorname{span} \mathcal{S}$ พร้อมทั้งหาฐานหลัก และมิติของ $\mathcal{U}$

บทที่ 3

การตั้งฉากของเวกเตอร์ (Orthogonality

3.1 การตั้งฉากกันของเวกเตอร์ (Orthogonality)

ในบทนี้ เราจะพิจารณาถึงการตั้งฉากของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^n$ ก่อนอื่นเราทบทวนถึงความหมายของการตั้งฉากกันของเวกเตอร์

บทนิยาม 3.1.1 (การตั้งฉากกันของเวกเตอร์)
เวกเตอร์ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ใน $\mathbb{R}^n$ **ตั้งฉากกัน (orthogonal)** ก็ต่อเมื่อ

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

โจทย์ปัญหา 23
จงหาค่า a ที่ทำให้เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -1 \\ a \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ตั้งฉากกัน

บทนิยาม 3.1.2 (เซตเชิงตั้งฉาก, เซตเชิงตั้งฉากปรกติ (Orthogonal set, orthonormal set))
เซตของเวกเตอร์ $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ ใน $\mathbb{R}^n$ เป็น**เซตเชิงตั้งฉาก (orthogonal set)** ก็ต่อเมื่อ $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = 0$ สำหรับทุก ๆ i, $j = 1$, 2, ..., k โดยที่ $i \neq j$
เราเรียกเซตเชิงตั้งฉาก $\mathcal{S}$ ว่า **เซตเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal set)** ถ้าแต่ละเวกเตอร์ใน $\mathcal{S}$ มีขนาดหนึ่งหน่วย

บทนิยาม 3.1.3
เราเรียกฐานหลัก $\mathcal{B}$ ของปริภูมิย่อย $\mathcal{U}$ ว่าเป็น**ฐานหลักเชิงตั้งฉาก (orthogonal basis)** ของ $\mathbb{R}^n$ ก็ต่อเมื่อ $\mathcal{B}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก.

โจทย์ปัญหา 24
จงแสดงว่า $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
เป็นเซตเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^3$

บทนิยาม 3.1.4
ปริภูมิย่อย $\mathcal{U}$ และ $\mathcal{V}$ ของ $\mathbb{R}^n$ **ตั้งฉากกัน**ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ เวกเตอร์ $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ ตั้งฉากกับทุก ๆ เวกเตอร์ $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$

ตัวอย่าง 3.1.1
จงแสดงว่าปริภูมิย่อยต่อไปนี้ตั้งฉากกัน
span $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$, span $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1.5 \end{bmatrix} \right\}$

วิธีทำ ให้ $\mathbf{u} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ และ $\mathbf{v} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \end{bmatrix} \right\}$ ดังนั้น $\mathbf{u} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\mathbf{v} = \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ สำหรับบางค่าของ α และ β

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \alpha\beta(6 - 6) = 0$$

□

ตัวอย่าง 3.1.2
จงหาฐานหลักของปริภูมิย่อย $\mathcal{U}$ ของ $\mathbb{R}^3$ ซึ่งนิยามจากสมการ

$$x - 2y + z = 0$$

วิธีทำ สังเกตว่าสมการนี้สามารถเขียนได้ในรูป $x = 2y - z$ ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เราสามารถแสดงได้ว่าเซต

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \}$$

เป็นฐานหลักของ $\mathcal{U}$ แต่ไม่ใช่ฐานหลักเชิงตั้งฉาก สังเกตว่า

$$\mathcal{U} = \operatorname{span} \mathcal{B}$$

□

ตัวอย่าง 3.1.3
พิจารณา

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

ซึ่งเป็นฐานหลักของปริภูมิย่อย $\mathbb{R}^3$ ให้ $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ α_1, α_2 และ α_3 ที่ทำให้

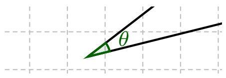
$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$$

วิธีทำ แสดงในห้องเรียน แต่จะเห็นว่าวิธีทำค่อนข้างยาว แต่ถ้าเราฐานหลักที่ใช้ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉาก การคำนวณจะง่ายขึ้นมาก ดังจะได้กล่าวต่อไป

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 3.1.5 (เวกเตอร์การฉาย (Projection))
ให้ u และ v เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ของ $\mathbb{R}^n$
เรานิยาม**เวกเตอร์การฉาย (projection)** ของเวกเตอร์ v บนเวกเตอร์ u ว่า

$$\boxed{\operatorname{proj}_u v = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} u}$$



หมายเหตุ โดยทั่วไปแล้ว

$$\operatorname{proj}_u v \neq \operatorname{proj}_v u$$

โจทย์ปัญหา 25
ให้ $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ จงหา $\operatorname{proj}_u v$ และ $\operatorname{proj}_v u$

วิธีทำ แสดงในห้องเรียน

3.2 กระบวนการของแกรม-ชมิท (Gram-Schmidt process)

บทนิยาม 3.2.1 (เวกเตอร์การฉาย, เวกเตอร์การฉายเชิงตั้งฉาก (Projection, orthogonal projection))
ให้เซต $\mathcal{S} = \{ v_1, v_2, \dots, v_m \}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิย่อย $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ และให้ $v \in \mathbb{R}^n$
เรานิยาม **เวกเตอร์การฉาย (projection)** ของเวกเตอร์ v บน $\mathcal{U}$ หรือ span $\mathcal{S}$ ว่า

$$\boxed{\operatorname{proj}_{v_1} v + \operatorname{proj}_{v_2} v + \cdots + \operatorname{proj}_{v_m} v}$$

เรานิยาม **เวกเตอร์การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection)** ของเวกเตอร์ v บน $\mathcal{U}$ หรือ span $\mathcal{S}$ ว่า

$$v - \left(\operatorname{proj}_{v_1} v + \operatorname{proj}_{v_2} v + \cdots + \operatorname{proj}_{v_m} v \right)$$

หรือ

$$\boxed{v - \operatorname{proj}_{v_1} v - \operatorname{proj}_{v_2} v - \cdots - \operatorname{proj}_{v_m} v}$$

กระบวนการแกรม-ชมิท (Gram-Schmidt process) เป็นกระบวนการสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉาก (orthogonal basis) และฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis) จากฐานหลัก ของปริภูมิย่อย $\mathcal{U}$ ของ $\mathbb{R}^n$
ให้เซต $\mathcal{S} = \{ u_1, u_2, \dots, u_p \}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิย่อย $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$

ขั้นตอนที่ 1 ทำเวกเตอร์ u_1 ให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเรียกว่า q_1

นั่นคือ

$$v_1 = u_1,$$
$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

ขั้นตอนที่ 2 หาเวกเตอร์การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) ของ u_2 บน span$\{ v_1 \}$ และทำให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเรียกว่า q_2

นั่นคือ

$$v_2 = u_2 - \operatorname{proj}_{v_1} u_2,$$
$$q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$$

ขั้นตอนที่ 3 หาเวกเตอร์การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) ของ u_3 บน span$\{ v_1, v_2 \}$ และทำให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเรียกว่า q_3

นั่นคือ

$$v_3 = u_3 - \operatorname{proj}_{v_1} u_3 - \operatorname{proj}_{v_2} u_3,$$
$$q_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$$

ขั้นตอนที่ 4 ทำขบวนการเดิมซ้ำ หาเวกเตอร์การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) ของ $\boldsymbol{u}_p$ บน span$\{\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{p-1} \,\}$ และทำให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเรียกว่า $\boldsymbol{q}_p$

นั่นคือ

$$\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{u}_p - \text{proj}_{\boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{u}_p - \text{proj}_{\boldsymbol{v}_2} \boldsymbol{u}_p - \cdots - \text{proj}_{\boldsymbol{v}_{p-1}} \boldsymbol{u}_p$$
$$\boldsymbol{q}_p = \frac{\boldsymbol{v}_p}{\|\boldsymbol{v}_p\|}$$

เซต $\{\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p \,\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉาก (orthogonal basis) ของ $\mathcal{U}$

เซต $\{\, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_p \,\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis) ของ $\mathcal{U}$

ตัวอย่าง 3.2.1
พิจารณา

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

ซึ่งเป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$ จงสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉาก (orthonormal basis) ของ $\mathbb{R}^3$ จาก $\mathcal{S}$ โดยใช้กระบวนการแกรม-ชมิท (Gram-Schmidt process)

ตัวอย่าง 3.2.2
จากฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis) ที่ได้จากตัวอย่าง (3.2.1) ของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ ให้ $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ α_1, α_2 และ α_3 ที่ทำให้

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{q}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{q}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{q}_3 \tag{3.1}$$

เมื่อ $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ และ $\boldsymbol{q}_3$ เป็นสมาชิกในฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis)

วิธีทำ ถ้าเราใช้ผลคูณจุด ทั้งสองข้างของสมการ (3.1) ด้วย $\boldsymbol{q}_1$ จะพบว่า

$$\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{u} = \alpha_1 \|\boldsymbol{q}_1\|^2 = \alpha_1$$

นั่นเอง ในทำนองเดียวกันเราสามารถหา α_2 และ α_3 ได้ □

แบบฝึกหัด

1. ปริภูมิย่อยคู่ใดตั้งฉากกัน

   (a) $\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$, $\text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$

   (b) $\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right\}$, $\text{span}\left\{\begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix}\right\}$

   (c) $\text{span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, $\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$

2. จงหาฐานหลัก (basis) ของปริภูมิย่อย (subspace) $\mathcal{U}$ ของ $\mathbb{R}^4$ ซึ่งนิยามจากสมการ

$$2x - y + z + 3w = 0$$

3. จากฐานหลัก ในข้อก่อน จงใช้กระบวนการของแกรม-ชมิท (Gram-Schmidt process) สร้างฐานหลักเชิงตั้งฉาก (orthogonal basis)

4. จงหาเวกเตอร์การฉาย (projection) และเวกเตอร์การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) ของเวกเตอร์ $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}3\\-1\\7\end{bmatrix}$ บนปริภูมิย่อยที่มีฐานหลัก คือ $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}$

5. พิจารณา

$$\mathcal{S} = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}\right\}$$

   ซึ่งเป็นฐานหลักของปริภูมิย่อยหนึ่ง จงสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis) จาก $\mathcal{S}$ โดยใช้กระบวนการของแกรม-ชมิท (Gram-Schmidt process)

6. พิจารณา

$$\mathcal{S} = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

ซึ่งเป็นฐานหลักของปริภูมิย่อยหนึ่ง จงสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis) จาก $\mathcal{S}$ โดยใช้กระบวนการของแกรม-ชมิท (Gram-Schmidt process)

บทที่ 4

การแปลงเชิงเส้น (Linear Transformations)

4.1 การแปลงเชิงเส้น (Linear transformation)

บทนิยาม 4.1.1 (การแปลงเชิงเส้น (Linear transformation)
ให้ $\mathcal{V}$ และ $\mathcal{W}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์
เราเรียก **การแปลง (transformation)** $\mathsf{T}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ ว่า **เชิงเส้น (linear)** ก็ต่อเมื่อ T สอดคล้องกับเงื่อนไขสองข้อต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \mathsf{T}(u+v) &= \mathsf{T}(u) + \mathsf{T}(v) \\ \mathsf{T}(cv) &= c\mathsf{T}(v) \end{aligned}$$

สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ u, v ใน $\mathcal{V}$ และทุก ๆ สเกลาร์ c

ในบทนี้ เราพิจารณาเฉพาะกรณี $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ และ $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 4.1.1
ให้ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ การแปลง $\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ในข้อใดเป็นการแปลงเชิงเส้น

$$\mathsf{T}_1(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{T}_2(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 4.1.2 (การแปลงเมทริกซ์ (Matrix transformation))
ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$
เราเรียกการแปลง $\mathsf{T}_\mathsf{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ที่นิยามโดย $\boxed{\mathsf{T}_\mathsf{A}(x) = \mathsf{A}x}$ ว่า **การแปลงเมทริกซ์ (matrix transformation)** จาก $\mathbb{R}^n$ ไปยัง $\mathbb{R}^m$

ทฤษฎีบท 4.1.1
ทุก ๆการแปลงเมทริกซ์บน $\mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

หมายเหตุ

- จากท.บ. (4.1.1) จะเห็นว่า เมื่อกำหนดเมทริกซ์ A ขนาด $m \times n$ ก่อน แล้วนิยามการแปลง T_A ว่า $\mathsf{T}_\mathsf{A}(x) = \mathsf{A}x$ การแปลงนี้ จะเป็นการแปลงเชิงเส้นบน $\mathbb{R}^n$
  คำถามที่น่าสนใจคือ เมื่อกำหนดการแปลงเชิงเส้น $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ บน $\mathbb{R}^n$ ก่อน เราสามารถจะหาเมทริกซ์ A ซึ่ง $\mathsf{T}(x) = \mathsf{A}x$ ได้หรือไม่?
  คำตอบคือได้ และมีอยู่ในทฤษฎีบทถัดไป

ทฤษฎีบท 4.1.2 (ทฤษฎีบทตัวแทน (Representation Theorem))
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น เมทริกซ์ขนาด* $m \times n$ *ซึ่งนิยามจาก*

$$\mathsf{A} = [\mathsf{T}(\boldsymbol{e}_1)\ \mathsf{T}(\boldsymbol{e}_2)\ \cdots\ \mathsf{T}(\boldsymbol{e}_n)]$$

โดยที่ $\{\, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \,\}$ *คือฐานหลักมาตรฐาน สำหรับ* $\mathbb{R}^n$ *เมทริกซ์นี้มีสมบัติว่า* $\mathsf{T}(x) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ *สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *นั่นคือ การแปลงเชิงเส้น* T *แทนด้วย* ***เมทริกซ์ตัวแทน*** A *เทียบกับฐานหลักมาตรฐาน ยิ่งกว่านั้น เมทริกซ์ตัวแทน* A *นี้มีเพียงเมทริกซ์เดียว*

นับจากนี้ เวลากล่าวถึงเมทริกซ์ตัวแทน A เทียบกับฐานหลักมาตรฐานของการแปลงเชิงเส้น T เราจะละคำว่า เทียบกับฐานหลักมาตรฐาน และเรียกเพียงเมทริกซ์ตัวแทน A ของ T

ตัวอย่าง 4.1.2 (การแปลงเฉือน (Shear transformation))
การแปลงเฉือน (shear transformation) ขนานกับแกน-x_1 ใน $\mathbb{R}^2$ แปลงจุด (x_1, x_2) ไปยังจุด $(x_1 + kx_2, x_2)$ ถ้าเราใช้ฐานหลักมาตรฐาน $\{\, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \,\}$ จะได้ว่า

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1, \quad \mathsf{T}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ตัวแทนของ T และถ้า $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ จงหา $\mathsf{T}(\boldsymbol{x})$

วิธีทำ เนื่องจาก $\mathsf{T}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1, \quad \mathsf{T}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$ ดังนั้น เราสามารถนิยาม A โดย

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathsf{T}(\boldsymbol{e}_1) & \mathsf{T}(\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2k \\ -2 \end{bmatrix}$$

□

โจทย์ปัญหา 26 (การหมุนใน $\mathbb{R}^2$ (Rotation in $\mathbb{R}^2$))
พิจารณาการแปลง $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ซึ่งหมุนจุด (x_1, x_2) ทวนเข็มนาฬิกาไปด้วยมุม θ ถ้าเราใช้ฐานหลักมาตรฐาน $\{\, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \,\}$ จะได้ว่า

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \mathsf{T}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ตัวแทนของ T และถ้า $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ จงหา $\mathsf{T}(\boldsymbol{x})$

โจทย์ปัญหา 27
จงหาเมทริกซ์ตัวแทนของการแปลงเชิงเส้น $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

สำหรับ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ แสดงในห้องเรียน

แบบฝึกหัด

1. ให้ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ จงหาเมทริกซ์ตัวแทนของการแปลงเชิงเส้นต่อไปนี้

   (a) $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$

   (b) $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. จงหาเมทริกซ์ตัวแทน A ของการแปลงเชิงเส้น $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ซึ่งมีสมบัติ

$$\mathsf{T}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{T}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3. จงหาเมทริกซ์ตัวแทน A ของการแปลงเชิงเส้น $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ (ในข้อนี้ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$)

   (a) T ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{x}$$

   โดยที่ $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (b) T ซึ่งมีสมบัติว่าหมุนจุด (x, y) ทวนเข็มนาฬิกาไปด้วยมุม $-\pi/4$ เรเดียน

   (c) T ซึ่งมีสมบัติว่าสะท้อนจุด (x, y) เทียบกับเส้นตรง $y = x$ นั่นคือ

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + 2[(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}]$$

   โดยที่ $\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4.2 เคอร์เนล และเรนจ์ (Kernel and range)

บทนิยาม 4.2.1 (เคอร์เนล และเรนจ์ (Kernel and range))
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน A

$$\boxed{\mathsf{T}(x) = \mathsf{A}x}$$

เรานิยาม **เคอร์เนล** $(kernel)$ ของ T เขียนแทนด้วย ker T และหมายถึง

$$\ker \mathsf{T} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \mathsf{A}x = 0 \,\}$$

ถ้าเขียน $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$
เรานิยาม **เรนจ์** $(range)$ ของ T เขียนแทนด้วย ran T และหมายถึง

$$\operatorname{ran} \mathsf{T} = \operatorname{span}\{\, A_1, A_2, \ldots, A_n \,\}$$

ตัวอย่าง 4.2.1
พิจารณาเมทริกซ์

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเมทริกซ์ $\mathsf{T}(x) = \mathsf{A}x$ จงหา ker T และ ran T

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \ker \mathsf{T} &= \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid \mathsf{A}x = 0 \,\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

สังเกตว่า

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$x_1 = x_3, \qquad x_2 = 5x_3$$

และ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ 5x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น

$$\ker \mathsf{T} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

ในขณะที่

$$\begin{aligned} \operatorname{ran} \mathsf{T} &= \operatorname{span}\{ A_1, A_2, A_3 \} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

จากท.บ.ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2.1
สำหรับเมทริกซ์ A ขนาด $m \times n$ ซึ่ง $\mathsf{T}(x) = \mathsf{A}x$
ถ้า A $\sim$ U โดยที่ U อยู่ในรูปขั้นบันได (echelon form) แล้ว คอลัมน์ ของ A ซึ่งสอดคล้องกับคอลัมน์ของ U ที่มีสมาชิกหลัก (leading entry) เป็นสมาชิก จะประกอบขึ้นเป็นฐานหลักของ ran T

เราจะสรุปได้ทันทีว่าจากท.บ. (4.2.1) และสมการ (**??**) ว่า

$$\operatorname{ran} \mathsf{T} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

นั่นเอง □

บทนิยาม 4.2.2 (ศูนยภาพและค่าลำดับชั้น (Nullity and rank))
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

เรานิยาม **ศูนยภาพ (nullity)** ของ T ว่าเป็นมิติของ ker T และเขียนแทนด้วย nullity T

เรานิยาม **ค่าลำดับชั้น (rank)** ของ T ว่าเป็นมิติของ ran T และเขียนแทนด้วย rank T

หมายเหตุ

- ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน A
  สังเกตว่า
  $$\operatorname{rank} \mathsf{T} = \operatorname{rank} \mathsf{A}$$

ทฤษฎีบท 4.2.2 (ความสัมพันธ์ระหว่างศูนยภาพและค่าลำดับชั้น)
ถ้า $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น แล้ว

$$\boxed{\operatorname{nullity} \mathsf{T} + \operatorname{rank} \mathsf{T} = n}$$

ตัวอย่าง 4.2.2
เมทริกซ์

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

นิยามการแปลงเมทริกซ์ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ว่า $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ จงหา nullity T และ rank T

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\ker \mathsf{T} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ดังนั้น nullity $\mathsf{T} = 1$ และเนื่องจาก

$$\text{nullity}\,\mathsf{T} + \text{rank}\,\mathsf{T} = 3$$

เพราะฉะนั้น rank $\mathsf{T} = 3 - 1 = 2$ □

4.3 การแปลงทั่วถึง, การแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง และการแปลงประกอบ (Onto transformation, one-to-one transformation and composite transformations)

บทนิยาม 4.3.1 (การแปลงทั่วถึง (Onto transformation))
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน A
เราเรียก T ว่า **การแปลงทั่วถึง (onto transformation)** ก็ต่อเมื่อ

$$\operatorname{ran}\mathsf{T} = \mathbb{R}^m$$

ทฤษฎีบท 4.3.1 (เงื่อนไขการแปลงทั่วถึง)
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน* A
ถ้า $m \le n$ *และ* $\operatorname{rank}\mathsf{T} = m$ *แล้ว* T *เป็นการแปลงทั่วถึง*

ตัวอย่าง 4.3.1
เมทริกซ์

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

นิยามการแปลงเมทริกซ์ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ว่า $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ การแปลง T เป็นการแปลงทั่วถึงหรือไม่?

วิธีทำ สังเกตว่า $n = 3$ และ $m = 2$ ซึ่ง $m < n$ และจากตัวอย่างในบทเรียนก่อน เราคำนวณไว้แล้วว่า $\operatorname{rank}\mathsf{T} = 2$ ดังนั้น T เป็นการแปลงทั่วถึง □

บทนิยาม 4.3.2 (การแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-one transformation))
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น เราเรียก T ว่า **การแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one transformation)** บน $\mathbb{R}^n$ ก็ต่อเมื่อ

$$\text{ถ้า } \mathsf{T}(\boldsymbol{u}_1) = \mathsf{T}(\boldsymbol{u}_2) \text{ แล้ว } \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$$

สำหรับทุก ๆ $\boldsymbol{u}_1$ และ $\boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{R}^n$

ทฤษฎีบท 4.3.2 (เงื่อนไขการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง)
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน* A
การแปลง T *เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ*

$$\ker\mathsf{T} = \{\,\boldsymbol{0}\,\} \subset \mathbb{R}^n$$

ตัวอย่าง 4.3.2
เมทริกซ์

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

นิยามการแปลงเมทริกซ์ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ว่า $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ การแปลง T เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่?

วิธีทำ เราสามารถแสดงได้ว่า $\ker\mathsf{T} = \{\,\boldsymbol{0}\,\}$ นั่นคือ T เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง □

บทนิยาม 4.3.3 (การแปลงประกอบ (Composite transformations))
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น
ให้ $\mathsf{S}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ เป็นการแปลงเชิงเส้น
เรานิยาม **การแปลงประกอบ (compostion transformation)**

$$\mathsf{S} \circ \mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

ว่า

$$(\mathsf{S} \circ \mathsf{T})(\boldsymbol{x}) = \mathsf{S}(\mathsf{T}(\boldsymbol{x}))$$

สำหรับ $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

ทฤษฎีบท 4.3.3
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน* A *ให้* $\mathsf{S}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน* B
การแปลงประกอบ (compostion transformation) $\mathsf{S} \circ \mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมริกซ์ตัวแทนคือ* $\mathsf{B}A$

ตัวอย่าง 4.3.3
ให้

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

และนิยามการแปลง $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ และ $\mathsf{S}(\boldsymbol{y}) = \mathsf{B}\boldsymbol{y}$ จงหาการแปลงประกอบ $(\mathsf{S} \circ \mathsf{T})\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

วิธีทำ พิจารณาในห้องเรียน

แบบฝึกหัด

1. สำหรับแต่ละเมทริกซ์ A ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -7 & -9 \\ -4 & 1 & 1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ถ้านิยามการแปลงเมทริกซ์ $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ จงหา

(a) ker T และ ran T

(b) rank T และ nullity T

(c) T เป็นการแปลงทั่วถึงหรือไม่?

(d) T เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่?

(e) เมทริกซ์คู่หนึ่งซึ่งสามารถนิยามการแปลงประกอบ (composite transformation) ได้

บทที่ 5

ปัญหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue Problems)

5.1 ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigenvalues and Eigenvectors)

บทนิยาม 5.1.1 (ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalues), เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigenvectors))
ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$
เราเรียกจำนวนเชิงซ้อน λ ว่า **ค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue)** ของ A ก็ต่อเมื่อ สมการเมทริกซ์

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{5.1}$$

มีผลเฉลย $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ใน $\mathbb{R}^n$
เราเรียกเวกเตอร์ $\boldsymbol{x}$ นี้ว่า **เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (eigenvector)** ของเมทริกซ์ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ

โจทย์ปัญหา 28
เวกเตอร์ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์
$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ หรือไม่?

การหาค่าลักษณะเฉพาะ
เราต้องการหาผลเฉลยที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ของสมการ $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ สังเกตว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(a) สมการ $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ มีผลเฉลยที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์
(b) สมการ $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \lambda\mathsf{I}_n\boldsymbol{x}$ มีผลเฉลยที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์
(c) สมการ $(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ มีผลเฉลยที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ (5.2)
(d) $\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}_n$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)
(e) $\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}_n) = 0$

เช่น

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น การหาผลเฉลยที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ของสมการ (5.1) จึงเท่ากับการหาผลเฉลย λ ของสมการ

$$\boxed{\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}_n) = 0}$$

ซึ่งเรียกว่า **สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation)** ในที่นี้ I_n คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ และเรามักใช้สัญลักษณ์ I

โจทย์ปัญหา 29
จงหาค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

โจทย์ปัญหา 30
จงหาค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 5.1.2 (ภาวะรากซ้ำเชิงพีชคณิต (Algebraic multiplicity))
ภาวะรากซ้ำเชิงพีชคณิต (algebraic multiplicity) ของค่าลักษณะเฉพาะ λ_0 ของเมทริกซ์ A คือจำนวนครั้ง ที่ λ_0 ปรากฏเป็นรากในสมการลักษณะเฉพาะ

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = 0$$

เราใช้สัญกรณ์ภาวะรากซ้ำเชิงพีชคณิตของค่าลักษณะเฉพาะ λ ว่า a_λ

ตัวอย่าง 5.1.1
ถ้าสมการค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A อยู่ในรูป

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$$

จงหาค่าของภาวะรากซ้ำเชิงพีชคณิต a_2 และ a_3

วิธีทำ $a_2 = 2$ และ $a_3 = 1$ □

วิธีการหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

หลังจากเราได้ค่าลักษณะเฉพาะ λ จากสมการลักษณะเฉพาะแล้ว เช่นได้ค่า $\lambda = \lambda_0$ เราสามารถหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ_0 โดยการแทน λ_0 ในสมการ (5.2)

$$\boxed{(\mathsf{A} - \lambda_0 \mathsf{I})\boldsymbol{x} = 0} \tag{5.3}$$

จากนั้นก็หาเวกเตอร์ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ที่เป็นผลเฉลยของสมการ (5.3) ต่อไป

บทนิยาม 5.1.3 (ปริภูมิลักษณะเฉพาะ (Eigenspace))
ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และมีค่าลักษณะเฉพาะ λ
ปริภูมิลักษณะเฉพาะ (eigenspace) ของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะ เฉพาะ λ คือ span ของเซตที่มีสมาชิกเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ
เราใช้สัญกรณ์ปริภูมิลักษณะเฉพาที่สมนัยกับค่าลักษณะ เฉพาะ λ ว่า $\mathcal{E}_\lambda$

ตัวอย่าง 5.1.2
เมทริกซ์

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

มีค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = 2$ และ $\lambda = 3$ จงหาปริภูมิลักษณะเฉพาะ $\mathcal{E}_2$ และปริภูมิลักษณะเฉพาะ $\mathcal{E}_3$

วิธีทำ เมทริกซ์ A มีค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = 2$ และ $\lambda = 3$

- **การหา** $\mathcal{E}_2$ เราแทน $\lambda = 2$ ในสมการ (5.3)

$$(\mathsf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ถ้าเราใช้กระบวนการดำเนินการตามแถว จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$x_2 = x_3 = 0$$

ผลเฉลยซึ่งคือเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะจึงอยู่ในรูป

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $x_1 \neq 0$ ในขณะที่

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} \tag{5.4}$$

สังเกตว่า $\mathcal{E}_2$ มีเวกเตอร์ศูนย์เป็นสมาชิกด้วย แต่เวกเตอร์ศูนย์ไม่ใช่เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

- **การหา** $\mathcal{E}_3$ แสดงในห้องเรียน

บทนิยาม 5.1.4 (ภาวะรากซ้ำเชิงเรขาคณิต (Geometric multiplicity))
ภาวะรากซ้ำเชิงเรขาคณิต (Geometric multiplicity) ของค่าลักษณะเฉพาะ λ คือมิติของปริภูมิลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ
เราใช้สัญกรณ์ภาวะรากซ้ำเชิงเรขาคณิตของค่าลักษณเฉพาะ λ ว่า g_λ

หมายเหตุ

- โดยปกติ $g_\lambda \leq a_\lambda$

ตัวอย่าง 5.1.3 เมทริกซ์

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

มีค่าลักษณะเฉพาะคือ

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 3$$

จงหาค่าของภาวะรากซ้ำเชิงเรขาคณิต g_2 และ g_3

วิธีทำ จากสมการ (5.4) จะเห็นว่า $g_2 = 1$ ลองคำนวณหา g_3 $\square$

โจทย์ปัญหา 31
พิจารณาเมทริกซ์

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมด และสำหรับแต่ละค่าลักษณะเฉพาะจงหา เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ, ภาวะรากซ้ำเชิงพีชคณิต, ปริภูมิลักษณะเฉพาะ และภาวะรากซ้ำเชิงเรขาคณิต ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะนั้น

วิธีทำ แสดงในห้องเรียน

สรุป

หา eigenvalue λ ให้ใช้สมการ $\boxed{\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = 0}$

หา eigenvector $\boldsymbol{x}$ ให้ใช้สมการ $\boxed{(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I})\boldsymbol{x} = 0}$

แบบฝึกหัด

จงหาค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ และสำหรับแต่ละค่าลักษณะเฉพาะจงหา เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ, ภาวะรากซ้ำเชิงพีชคณิต, ปริภูมิลักษณะเฉพาะ และภาวะรากซ้ำเชิงเรขาคณิต ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะนั้น

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} -15 & 28 & -14 \\ -10 & 19 & -10 \\ -4 & 8 & -5 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -3 & 5 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

บรรณานุกรม

[1] L. C. Andrews (1992), **Special Functions of Mathematics for engineers**. 2nd ed., McGraw Hill.

[2] E. Kreyszig (2006), **Advanced Engineering Mathematics**. 9th ed., Wiley.