

การบ้านรายวิชา SCMA351

ระบบสมการเชิงเส้นและปริภูมิเวกเตอร์

February 9, 2016

1. พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned}x - z &= 0 \\3x + y &= 1 \\-x + y + z &= 4\end{aligned}$$

- ระบบสมการนี้เป็นระบบสมการเอกพันธ์ (homogeneous) หรือไม่เอกพันธ์ (nonhomogeneous)
- จงเขียนระบบสมการดังกล่าวในรูปเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix)
- ใช้การดำเนินการตามแถว (row operations) แปลงเมทริกซ์แต่งเติมให้อยู่ในรูปขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon form)
- จากรูปขั้นบันไดของเมทริกซ์แต่งเติม จงหาสมาชิกหลัก (leading entry) และตัวแปรหลัก (leading variable) ของแต่ละแถว
- ระบบสมการในรูปขั้นบันไดลดรูป มีตัวแปรอิสระหรือไม่
- จงหาเซตผลเฉลยของระบบสมการดังกล่าว

2. ระบบสมการหนึ่งมีเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix)

$$M = [A | b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 8 \\ -2 & 7 & 0 & -11 \end{array} \right]$$

- จงหา rank A และ rank M
- ระบบสมการนี้มีผลเฉลยหรือไม่
- จงหาจำนวนตัวแปรอิสระ (free variable) ของระบบสมการนี้จากเมทริกซ์รูปขั้นบันไดลดรูปของ M
- ถ้าระบบสมการนี้มีผลเฉลย จงหาเซตผลเฉลย

3. จงหาค่าของ α และ β ที่ทำให้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{aligned}x_1 - x_4 &= 2 \\x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ \alpha x_3 &= 1 \\x_2 + \beta x_4 &= 0\end{aligned}$$

- (a) เป็นระบบสมการเชิงเส้นที่ไม่มีผลเฉลย
- (b) เป็นระบบสมการเชิงเส้นที่มีผลเฉลยเดียว
- (c) เป็นระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์
4. จงหาพหุนามอันดับ 2 (polynomial of degree 2) ที่ผ่านจุด $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 10)$ (hint: เมื่อกำหนดให้ $p(x) = a + bx + cx^2$ โดยที่ a, b, c คือตัวแปรที่ไม่ทราบค่า เราสามารถหาค่าของ a, b, c โดยการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบไปด้วย 3 สมการ)
5. กำหนดให้ \mathbb{C} เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน (complex number) $z = a + bi$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ เป็นจำนวนจริงใดๆ กำหนดนิยามของการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในเซต \mathbb{C} ดังนี้

$$\bullet (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\bullet \forall k \in \mathbb{R}, k(a + bi) = ka + (kb)i$$

จงตรวจสอบว่า \mathbb{C} เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่

6. กำหนดให้ $W = \left\{ \begin{bmatrix} 3a \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} ; \text{เมื่อ } a \in \mathbb{R} \right\}$ จงแสดงว่า W เป็นปริภูมิย่อยสำหรับปริภูมิเวกเตอร์ \mathbb{R}^3 .

7. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

- (a) จงหาปริภูมิศูนย์ (null space) ของ A
- (b) $\text{null } A$ เป็นปริภูมิย่อยของ \mathbb{R}^k เมื่อ k มีค่าเป็นเท่าใด
- (c) จงหาเซต $B = \{b \mid Ax = b\}$
- (d) จงแสดงว่า B เป็นปริภูมิย่อยของ \mathbb{R}^3
- (e) จงอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง B และปริภูมิแถวตั้งของ A
8. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ แล้ว จงหาฐานหลัก (basis) และมิติ (dimension) ของปริภูมิศูนย์และปริภูมิแถวตั้งของ A ตามลำดับ
9. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นอิสระเชิงเส้นกันหรือไม่

$$\{x, 1 + x, x + \sin^2 x, x^3 - x, x + \cos^2 x\}$$

10. จงตรวจสอบว่าเซต S ต่อไปนี้เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly independent) หรือไม่ ถ้า S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly dependent) จงหาเวกเตอร์ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของเวกเตอร์ที่เหลือ

(a) $F(-\infty, \infty) : S = \{\sin t, \cos t\}$

(b) $P_2 : S = \{1 - t, 1 + t + t^2, 3 - t + t^2\}$

(c) $\mathbb{R}^{2 \times 2} : S \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$(d) \mathbb{R}^{2 \times 2} : S \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

11. กำหนดให้เซต $\{u, v, w\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน จงแสดงว่าเซต $\{u + 2v, v - 3w, u - v + w\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นกันหรือไม่

12. จงหาฐานหลักของปริภูมิย่อยที่ถูกแผ่ทั่วโดยเซต $S = \{(1, 2, 2), (-1, 0, 0), (1, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

13. จงตรวจสอบว่าเซต $S = \{1 - t + t^2, 1 + 2t\}$ แผ่ทั่ว $(\text{span}) P_2$ หรือไม่?

14. จงหาค่าของ α ที่เป็นไปได้ทั้งหมด เมื่อกำหนดให้ $\begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 0 & 6 - \alpha \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกของเซตการแผ่ทั่ว

$$S = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & \alpha^2 - \alpha - 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha + 1 & -3 \\ 0 & \alpha^2 - 4 \end{bmatrix} \right\}$$

15. จงแสดงว่าเซต $S = \{(-1, 2), (1, -2), (2, 4)\}$ เป็นฐานหลักของ \mathbb{R}^2 หรือไม่

16. จงหาฐานหลักและมิติของปริภูมิแถวบนของเมทริกซ์ A เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

17. **Challenge!** จงพิสูจน์ว่าถ้าปริภูมิเวกเตอร์ V มีฐานหลักชุดหนึ่งประกอบไปด้วยเวกเตอร์ m เวกเตอร์แล้ว ฐานหลักชุดอื่นๆ ของปริภูมิเวกเตอร์ V นี้จะมีจำนวนของเวกเตอร์เป็น m เช่นกัน

18. จงหามิติของปริภูมิย่อยของ \mathbb{R}^4 ต่อไปนี้

$$V = \text{span}\{(-1, 2, 3, 0), (5, 4, 3, 0), (3, 1, 0, 0)\}$$

19. กำหนดให้ $S = \{1 + 2t^2 + t^4, 2 + t + 4t^2 + t^3 + 5t^4, 1 + t + 2t^2 + t^3 + \alpha t^4\}$ จงหาค่าของ α ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ที่ทำให้ $\dim(\text{span}(S)) = 2$

20. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 7×9 และ $\text{rank } A = 5$ แล้ว จงหา $\dim(\text{Col } A)$, $\dim(\text{Row } A)$, และ $\dim(\text{Null } A)$

21. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่มีค่าลำดับชั้น $\text{rank } A = r$ แล้ว จงหาค่าลำดับชั้น (rank) ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times n}, \quad \begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times 2n}$$