

การบ้านรายวิชา SCMA351

ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

1. จงหาค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalues) และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (eigenvectors) ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$(a) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (d) A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 15 \\ -14 & 16 & 10 \\ -7 & -1 & 23 \end{bmatrix}$$

2. จงหาค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalues) และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (eigenvectors) ของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

3. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ จงพิสูจน์ว่าเมทริกซ์ A และ A^T มีค่าลักษณะเฉพาะชุดเดียวกัน

4. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ จงพิสูจน์ว่าเราสามารถหาเมทริกซ์ผกผัน A^{-1} ได้ ก็ต่อเมื่อ ไม่มีค่าลักษณะเฉพาะใดๆ เลยของเมทริกซ์ A ที่เป็นศูนย์

5. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีตัวผกผัน A^{-1} และให้ $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของ A จงหาค่าลักษณะเฉพาะของ A^{-1}

6. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และ $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของ A จงหาค่าลักษณะเฉพาะของ $A - \alpha I$

7. จงทำเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์เฉียงและหาค่าของ A^3

8. พิจารณาเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

- (a) จงแสดงว่า $\lambda = 2$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalues) ค่าหนึ่งของเมทริกซ์ A

- (b) กำหนดให้ V เป็นปริภูมิย่อย (subspace) ที่เกิดจากการแผ่ตัวของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (eigenvectors) ที่สอดคล้องกับค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalues) $\lambda = 2$ แล้ว จงหาฐานหลัก (basis) ของปริภูมิย่อย V (ป.ล. เราเรียก V ว่าปริภูมิลักษณะเฉพาะ (eigenspace))

9. พิจารณาเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ α ที่ทำให้ปริภูมิลักษณะเฉพาะ (eigenspace) สำหรับค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda = 5$ มีมิติเท่ากับ 2